Desigualdades vectoriales de operadores en espacios de Lebesgue con exponente variable

Marcos J. Bonich
en conjunto con Daniel Carando y Martin Mazzitelli

IMAS, UBA-CONICET

8 de junio de 2023
XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro

Caso constante

Teniendo un operador lineal y acotado $T\colon L^q(\Omega_2,\mu) \to L^p(\Omega_1,\nu)$, podemos considerar su extensión vectorial natural, dada por el operador

$$\tilde{T} : L^q(\ell^r) \to L^p(\ell^r)$$

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \mapsto (T(f_1), T(f_2), \ldots, T(f_n), \ldots) .$$

Caso constante

Teniendo un operador lineal y acotado $T\colon L^q(\Omega_2,\mu) \to L^p(\Omega_1,\nu)$, podemos considerar su extensión vectorial natural, dada por el operador

$$\tilde{T} : L^q(\ell^r) \to L^p(\ell^r)$$

$$(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \mapsto (T(f_1), T(f_2), \dots, T(f_n), \dots) .$$

¿Es acotado?

$$\left\| \tilde{T}((f_n)_n) \right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C \, \| T \| \, \| (f_n)_n \|_{L^q(\ell^r)} , \qquad C \geq 1.$$

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene sucesiones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene sucesiones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

Entonces $\tilde{T}$ es acotado si existe $C \geq 1$ tal que

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(\Omega_2,\mu)},$$

para toda sucesión $(f_n)_n \in L^q(\ell^r)$.

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene funciones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

Entonces $\tilde{T}$ es acotado si existe $C \geq 1$ tal que

$$\left(\int_{\Omega_1} \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{p}{r}} d\nu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|T\| \left(\int_{\Omega_2} \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{q}{r}} d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

para toda sucesión $(f_n)_n \in L^q(\ell^r)$.

La constante $k_{L^q(\Omega_2,\mu),L^p(\Omega_1,\nu)}(r)$ es el ínfimo de las constantes que verifican $\left\| \tilde{T}((f_n)_n) \right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C \left\| T \right\| \left\| (f_n)_n \right\|_{L^q(\ell^r)}$, para todas las $(f_n)_n \in L^q(\ell^r)$ y **todo** operador $T\colon L^q(\Omega_2,\mu) \to L^p(\Omega_1,\nu)$.

La constante $k_{L^q(\Omega_2,\mu),L^p(\Omega_1,\nu)}(r)$ es el ínfimo de las constantes que verifican $\left\|\tilde{T}((f_n)_n)\right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C\,\|T\|\,\|(f_n)_n\|_{L^q(\ell^r)}$, para todas las $(f_n)_n \in L^q(\ell^r)$ y **todo** operador $T\colon L^q(\Omega_2,\mu) \to L^p(\Omega_1,\nu)$.
M. Junge demostró que si $L^q(\Omega_2,\mu)$ y $L^p(\Omega_1,\nu)$ tienen dimensión infinita, entonces las constantes no dependen de los espacios de medida. Esto nos permite definir

$$k_{q,p}(r) = k_{L^q(\Omega_2,\mu),L^p(\Omega_1,\nu)}(r),$$

con Ω_1 y Ω_2 cualquier par de espacios que no sean unión finita de átomos.

Marcinkiewicz y Zygmund ('39) probaron que dados cualesquiera $0 < p, q < \infty$, existe $C \geq 1$ tal que **todos** los operadores $T\colon L^q(\Omega_2, \mu) \to L^p(\Omega_1, \nu)$ verifican:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\Omega_2,\mu)} .$$

Marcinkiewicz y Zygmund ('39) probaron que dados cualesquiera $0 < p, q < \infty$, existe $C \geq 1$ tal que **todos** los operadores $T\colon L^q(\Omega_2, \mu) \to L^p(\Omega_1, \nu)$ verifican:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\Omega_2,\mu)}.$$

También probaron que si $0 < \max\{p, q\} < r < 2$, entonces todos los T tienen extensión ℓ^r-vectorial acotada:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(\Omega_2,\mu)}.$$

Teorema (Defant - Junge ('98))

Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *y*

$$I(p,q) = \begin{cases} (q,2] & \textit{si } p < q < 2 \\ [2,p) & \textit{si } 2 < p < q \\ [\min\{2,q\}, \max\{2,p\}] & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $k_{q,p}(r) < \infty$ *si y solo si* $r \in I(p,q)$.

Caso variable

¿Qué ocurre si cambiamos los exponentes (constantes) p y q por exponentes variables $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$?

Caso variable

¿Qué ocurre si cambiamos los exponentes (constantes) p y q por exponentes variables $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$?

Definición (Exponente variable)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Entonces denotamos por $\mathcal{P}(\Omega, \mu)$ el conjunto de las funciones μ-medibles y acotadas $\mathbf{p}\colon \Omega \to [1, \infty)$. Además notaremos

$$p_- = ess \inf_{x \in \Omega} \mathbf{p}(x) \quad \text{and} \quad p_+ = ess \sup_{x \in \Omega} \mathbf{p}(x).$$

Caso variable

¿Qué ocurre si cambiamos los exponentes (constantes) p y q por exponentes variables $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$?

Definición (Exponente variable)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Entonces denotamos por $\mathcal{P}(\Omega, \mu)$ el conjunto de las funciones μ-medibles y acotadas $\mathbf{p}\colon \Omega \to [1, \infty)$. Además notaremos

$$p_- = \mathit{ess}\ \inf_{x\in\Omega} \mathbf{p}(x) \quad \text{and} \quad p_+ = \mathit{ess}\sup_{x\in\Omega} \mathbf{p}(x).$$

En esta charla consideraremos únicamente exponentes tales que $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ y llamaremos $\mathcal{P}_b(\Omega, \mu)$ al subconjunto de estos exponentes.

Definición

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Dada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Omega, \mu)$, definimos $L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ como el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que, para algún $\lambda > 0$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) < +\infty.$$

Definición

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Dada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Omega, \mu)$, definimos $L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ como el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que, para algún $\lambda > 0$

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) < +\infty.$$

Este conjunto se convierte en un espacio de Banach cuando se equipa con la norma de Luxemburgo

$$\|f\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) \leq 1 \right\}.$$

Podríamos decir que "$L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ es un espacio de funciones que en distintas partes de Ω se parece a distintos espacios L^p".

Podríamos decir que "$L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ es un espacio de funciones que en distintas partes de Ω se parece a distintos espacios L^p".
Por ejemplo, si consideramos el exponente variable

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

La función $\frac{1}{x}$ está en $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

Fijados (Ω_2, μ) y (Ω_1, ν), pensemos en operadores

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_2, \mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1, \nu).$$

¿Existe $C \geq 1$ tal que **todos** ellos cumplan

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu)} ?$$

Fijados (Ω_2,μ) y (Ω_1,ν), pensemos en operadores

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu).$$

¿Existe $C \geq 1$ tal que **todos** ellos cumplan

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu)} ?$$

En caso de que exista, llamaremos $k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)}(r)$ al ínfimo de ellas y en caso contrario diremos que es infinito.

Fijados (Ω_2,μ) y (Ω_1,ν), pensemos en operadores

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu).$$

¿Existe $C \geq 1$ tal que **todos** ellos cumplan

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu)} ?$$

En caso de que exista, llamaremos $k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)}(r)$ al ínfimo de ellas y en caso contrario diremos que es infinito.
Las constantes dependen de los espacios de medida (ya que **p** y **q** dependen de éstos), pero cuando no haya ambigüedad sobre éstos, escribiremos directamente $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ en lugar de $k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)}(r)$.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ para distintos exponentes.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ para distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ *y supongamos que*

$$1 < \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 < \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ para distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ *y supongamos que*

$$1 < \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 < \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

Básicamente, $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ “crece” si $\mathbf{q}$ crece y $\mathbf{p}$ decrece.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ para distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}_b(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ *y supongamos que*

$$1 < \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 < \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

Básicamente, $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ "crece" si $\mathbf{q}$ crece y $\mathbf{p}$ decrece.
La demostración de dichas propiedades de crecimiento y decrecimiento es una adaptación de las mismas propiedades en el caso en que p y q son constantes.

Teorema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_b(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_b(\Omega_2, \mu)$ *donde* (Ω_1, ν) *y* (Ω_2, μ) *son espacios de medida no atómicos,* $1 < r < \infty$ *y*

$$I(p,q) = \begin{cases} (q, 2] & \text{if } p < q < 2, \\ [2, p) & \text{if } 2 < p < q, \\ [\min\{2, q\}, \max\{2, p\}] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ *si y sólo si* $r \in I(p_-, q_+)$.

Dem. (idea):
La vuelta del teorema se consigue por el teorema de Defant-Junge y por las propiedades de crecimiento y decrecimiento:

$$k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) \lesssim k_{q_+,p_-}(r) < \infty.$$

La ida

Si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ entonces $r \in I(p_-, q_+)$.

Para la ida tengamos en cuenta algunas propiedades. La constante se reduce en subconjuntos de Ω_1 y Ω_2. En particular, si consideramos los subconjuntos

$$\Omega_1^\varepsilon = \{x \in \Omega_1 | p(x) < p_- + \epsilon\},$$
$$\Omega_2^\varepsilon = \{x \in \Omega_2 | q(x) > q_+ - \epsilon\},$$

tendremos que

$$k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2^\varepsilon,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1^\varepsilon,\nu)}(r) \lesssim k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)}(r).$$

La ida

Si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ entonces $r \in I(p_-, q_+)$.

Como los espacios de medida son no atómicos, $L^{q_+-\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon)$ y $L^{p_-+\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon)$ tienen dimensión infinita. Luego, las constantes son independientes de los espacios de medida. En particular

$$k_{q_+-\varepsilon,p_-+\varepsilon}(r) = k_{L^{q_+-\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon,\mu),L^{p_-+\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon,\nu)}(r).$$

La ida

Si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ entonces $r \in I(p_-, q_+)$.

Como los espacios de medida son no atómicos, $L^{q_+-\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon)$ y $L^{p_-+\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon)$ tienen dimensión infinita. Luego, las constantes son independientes de los espacios de medida. En particular

$$k_{q_+-\varepsilon,p_-+\varepsilon}(r) = k_{L^{q_+-\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon,\mu),L^{p_-+\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon,\nu)}(r).$$

Con estas dos propiedades y las propiedades de crecimiento y decrecimiento ($q(x) > q_+ - \varepsilon$ y $p(x) < p_- + \varepsilon$) tendremos

$$\begin{aligned} k_{q_+-\varepsilon,p_-+\varepsilon}(r) &= k_{L^{q_+-\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon,\mu),L^{p_-+\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon,\nu)}(r) \\ &\lesssim k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2^\varepsilon,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1^\varepsilon,\nu)}(r) \\ &\lesssim k_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu),L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)}(r) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

La ida

Si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ entonces $r \in I(p_-, q_+)$.

Por lo tanto, si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$, entonces $k_{q_+-\varepsilon,p_-+\varepsilon}(r) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica (por el caso constante) que $r \in \bigcap_{\varepsilon>0} I(p_- + \varepsilon, q_+ - \varepsilon)$.

El resto de la prueba es considerar los distintos rangos de valores que pueden tomar p_- y q_+ para finalmente verificar que

$$\bigcap_{\varepsilon>0} I(p_- + \varepsilon, q_+ - \varepsilon) = I(p_-, q_+).$$

Aplicación

En su libro, J. Garcia Cuerva y J.L. Rubio de Francia dicen "...almost all the information that one may wish concerning the boundedness properties of a linear operator, is contained in the weighted-L^2 inequalities that this operator satisfies...". En este sentido, escriben el siguiente resultado

Aplicación

En su libro, J. Garcia Cuerva y J.L. Rubio de Francia dicen "...almost all the information that one may wish concerning the boundedness properties of a linear operator, is contained in the weighted-L^2 inequalities that this operator satisfies...". En este sentido, escriben el siguiente resultado

Corolario

Sean $1 < p < \infty$ y $1/\alpha = |1 - 2/p|$. Un operador lineal $T\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es acotado si y solo si, para cada peso $u \in L_+^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ podemos encontrar un peso w tal que: $u(x) \leq w(x)$, $\|w\|_\alpha \leq 2\|u\|_\alpha$ y T es acotado en $L^2_{w^\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (donde $\sigma = 1$ si $2 \leq p$ y $\sigma = -1$ si $p < 2$).

Aplicación

En su libro, J. Garcia Cuerva y J.L. Rubio de Francia dicen "...almost all the information that one may wish concerning the boundedness properties of a linear operator, is contained in the weighted-L^2 inequalities that this operator satisfies...". En este sentido, escriben el siguiente resultado

Corolario

Sean $1 < p < \infty$ *y* $1/\alpha = |1 - 2/p|$. *Un operador lineal* $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *es acotado si y solo si, para cada peso* $u \in L_+^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *podemos encontrar un peso* w *tal que:* $u(x) \leq w(x)$, $\|w\|_\alpha \leq 2\,\|u\|_\alpha$ *y* T *es acotado en* $L^2_{w^\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *(donde* $\sigma = 1$ *si* $2 \leq p$ *y* $\sigma = -1$ *si* $p < 2$*).*

Luego, dicen "We invite the reader to search for more general formulations of our last corollary, involving, for instance, weighted inequalities in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for the operator T."

Usando nuestro teorema podemos decir que, para ciertos rangos de r, la información sobre la acotación de $T\colon L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)$ está contenida en las desigualdades L^r-pesadas que satisface T:

Usando nuestro teorema podemos decir que, para ciertos rangos de r, la información sobre la acotación de $T\colon L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)$ está contenida en las desigualdades L^r-pesadas que satisface T:

Corolario

- *Si* $2 \leq r < \min\{p_-, q_-\}$ *entonces* $T\colon L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)$ *es acotado si y solo si, dado* $u \in L_+^{\alpha(\cdot)}(\Omega_1,\nu)$, *existe* $U \in L_+^{\beta(\cdot)}(\Omega_2,\mu)$ *tal que* $\|U\|_{\beta(\cdot)} \leq \|u\|_{\alpha}$ *y* $T\colon L^r(\Omega_2, Ud\mu) \to L^r(\Omega_1, ud\nu)$ *es acotado.*
- *Si* $\max\{p_+, q_+\} < r \leq 2$ *entonces* $T\colon L^{\mathbf{q}}(\Omega_2,\mu) \to L^{\mathbf{p}}(\Omega_1,\nu)$ *es acotado si y solo si, dado* $u \in L_+^{\beta(\cdot)}(\Omega_2,\mu)$, *existe* $U \in L_+^{\beta(\cdot)}(\Omega_1,\nu)$ *tal que* $\|U\|_{\alpha(\cdot)} \leq \|u\|_{\beta}$ *y* $T\colon L^r(\Omega_2, u^{-1}d\mu) \to L^r(\Omega_1, U^{-1}d\nu)$ *es acotado.*

¡Gracias!